MATEMATIKOS BRANDOS EGZAMINO UŽDUOTIES 2023 METŲ PAVYZDŽIO KANDIDATŲ DARBŲ VERTINIMO INSTRUKCIJA

Išplėstinis kursas

I dalis

1	$x = \frac{1}{3}$ (arba $\frac{1}{3}$, arba 0,(3))
2	$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{13}$ (arba $\sqrt{13}$)
3	$F(x) = \frac{x^2}{2} + x$ (arba $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + C$)
4	$b = 64$ (arba 64)
5	$d = -\frac{2}{3}$ (arba $-\frac{2}{3}$)
6	$x \in (-1; 1)$ (arba $(-1; 1)$)
7	$a = 1001$ (arba 1001)
8	4095
9	$a \in [0; 1)$ (arba $[0; 1)$)
10	$9\frac{3}{13}$ (arba $\frac{120}{13}$)

II dalis

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
11		**8**	
11.1	$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{pagr.}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 = 96.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.
11.2		**2**	
	I būdas SA – pasviroji į plokštumą $ABCD$, AB – jos projekcija plokštumoje.	1	Už teisingai įvardytas pasvirąją ir jos projekciją plokštumoje.
	$AB \perp AD$ (stačiakampio kraštinės), todėl $AD \perp SA$ (trijų statmenų teorema). Todėl trikampis *SAD* yra statusis.	1	Už teisingai pritaikytą trijų statmenų teoremą ir pagrindimą, kad trikampis *SAD* yra statusis.
	II būdas $BD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = 6\sqrt{2}$ (Pitagoro teorema); $SD = \sqrt{SB^2 + BD^2} = \sqrt{8^2 + \left(6\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{136} =$ $= 2\sqrt{34}$ (Pitagoro teorema).	1	Už teisingai apskaičiuotus *BD* ir *SD* ilgius.
	$SA = \sqrt{SB^2 + BA^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ (Pitagoro teorema); $SA^2 + AD^2 = 10^2 + 6^2 = 136 = SD^2 \implies$ $\implies \Delta SAD$ yra statusis pagal atvirkštinę Pitagoro teoremą.	1	Už teisingai pritaikytą atvirkštinę Pitagoro teoremą ir teisingą išvadą, kad trikampis *SAD* yra statusis.
	III būdas $SA = \sqrt{SB^2 + BA^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ (Pitagoro teorema); $BD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = 6\sqrt{2}$ (Pitagoro teorema); $SD = \sqrt{SB^2 + BD^2} = \sqrt{8^2 + \left(6\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{136} =$ $= 2\sqrt{34}$ (Pitagoro teorema).	1	Už teisingai apskaičiuotus *SA*, *BD* ir *SD* ilgius.
	Pagal kosinusų teoremą: $SD^2 = AD^2 + SA^2 - 2 \cdot AD \cdot SA \cdot \cos\angle SAD \implies$ $\cos\angle SAD = \dfrac{SD^2 - AD^2 - SA^2}{-2 \cdot AD \cdot SA} = 0 \implies$ $\angle SAD = 90^{\circ}$, todėl ΔSAD yra statusis.	1	Už teisingai pritaikytą kosinuso teoremą ir teisingą išvadą, kad trikampis *SAD* yra statusis.
11.3		**2**	
	$SA^2 = AB^2 + SB^2 = 36 + 64 = 100,$ $SA = 10.$	1	Už teisingai apskaičiuotą briaunos *SA* arba *SC* ilgį.
	$S_{\text{šon.}} = S_{SAB} + S_{SBC} + S_{SAD} + S_{SCD} =$ $= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 =$ $= 108.$	1	Už teisingai apskaičiuotą šoninio paviršiaus plotą.
11.4		**3**	
	$\frac{V_1}{V} = \frac{1}{2} = k^3;$	1	Už suvokimą, kad mažosios ir pradinės piramidžių tūrių

			santykis yra lygus panašumo koeficiento kubui.
	$k = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$;	1	Už teisingai apskaičiuotą panašumo koeficientą.
	$\frac{SE}{SB} = k$; $\frac{SE}{8} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; $SE = \frac{8}{\sqrt[3]{2}} = 4\sqrt[3]{4}$. *Ats.*: $SE = 4\sqrt[3]{4}$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
12		**4**	
	$\operatorname{tg} x \cdot \cos(-x) = \operatorname{tg} x \cdot \cos x.$	1	Už teisingai pertvarkytą skaitiklį.
	$\sin(2024\pi + x) + 2\sin x = \sin x + 2\sin x =$ $= 3\sin x.$	1	Už teisingai pertvarkytą vardiklį.
	$\dfrac{\operatorname{tg} x \cdot \cos x}{3\sin x} = \dfrac{1}{3}.$	1	Už teisingai gautą reiškinio A reikšmę.
	$\arcsin\left(\dfrac{1}{3}\right) \approx 0{,}34.$ *Ats.:* $0{,}34.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.

<table>
<tr><th>Užd.</th><th>Sprendimas ir atsakymas</th><th>Taškai</th><th>Vertinimas</th></tr>
<tr><td>13</td><td></td><td>8</td><td></td></tr>
<tr><td>13.1</td><td>Ištraukus vieną rutulį ir užrašius rezultatą lape, galimos reikšmės bus 1, 1, 1, 2, 2, 3.
$n = 6;\ m = 2.$
$\mathbf{P}(lape\ užrašytas\ skaičius\ 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$</td><td>1</td><td>Už gautą teisingą atsakymą.</td></tr>
<tr><td>13.2</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>I būdas
Suma bus lygi 4, kai lape bus užrašyti skaičiai: 1 ir 3, arba 3 ir 1, arba 2 ir 2.</td><td>1</td><td>Už suvokimą, kada ištrauktų skaičių suma bus lygi 4.</td></tr>
<tr><td></td><td>$\mathbf{P}(1 \text{ ir } 3) = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12};$</td><td>1</td><td>Už teisingai apskaičiuotą tikimybę, kai vienas skaičius bus lygus 1, o kitas 3.</td></tr>
<tr><td></td><td>$\mathbf{P}(2\ ir\ 2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9};$</td><td>1</td><td>Už teisingai apskaičiuotą tikimybę, kai abu skaičiai bus 2.</td></tr>
<tr><td></td><td>$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(1\ ir\ 3) + \mathbf{P}(3\ ir\ 1) + \mathbf{P}(2\ ir\ 2) =$
$= \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{5}{18}.$

Ats.: $\mathbf{P}(A) = \frac{5}{18}.$</td><td>1</td><td>Už gautą teisingą atsakymą.</td></tr>
<tr><td></td><td>II būdas
<table>
<tr><th>+</th><th>1</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>4</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>6</td><td>5</td><td>5</td></tr>
<tr><td>4</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td><td>4</td></tr>
<tr><td>4</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td><td>4</td></tr>
</table></td><td>1

1</td><td>Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą (sudarytą lentelę).

Už teisingai užpildytą lentelę.</td></tr>
<tr><td></td><td>$m = 10$</td><td>1</td><td>Už teisingai nustatytą palankių baigčių skaičių.</td></tr>
<tr><td></td><td>$\mathbf{P}(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$

Ats.: $\mathbf{P}(A) = \frac{5}{18}.$</td><td>1</td><td>Už gautą teisingą atsakymą.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>13.3</td><td>$\mathbf{P}(X = 2) = \mathbf{P}(1 \text{ ir } 1) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4};$
$\mathbf{P}(X = 3) = \mathbf{P}(1 \text{ ir } 2) + \mathbf{P}(2 \text{ ir } 1) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3};$
$\mathbf{P}(X = 5) = \mathbf{P}(2 \text{ ir } 3) + \mathbf{P}(3 \text{ ir } 2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{9}.$
<table>
<tr><td>m</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>$\mathbf{P}(X = m)$</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>$\frac{5}{18}$</td><td>$\frac{1}{9}$</td><td>$\frac{1}{36}$</td></tr>
</table></td><td>1

1

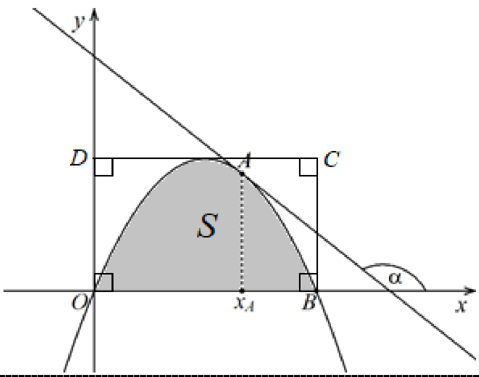
1</td><td>Už teisingai apskaičiuotą vieną tikimybę.

Už teisingai apskaičiuotą antrą tikimybę.

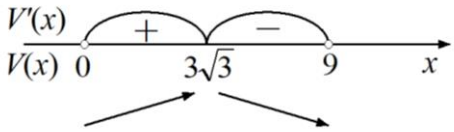
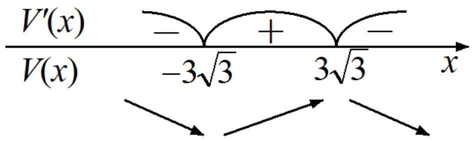
Už teisingai užpildytą atsitiktinio dydžio skirstinio lentelę.</td></tr>
</table>

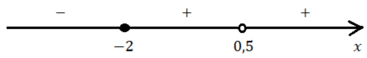
	Pastabos. 1. Jeigu mokinys, apskaičiuodamas paskutinę tikimybę, iš 1 atima kitų keturių tikimybių sumą, jam skiriamas paskutinis taškas. 2. Jeigu mokinys atsitiktinio dydžio skirstinį teisingai užpildo, remdamasis sudaryta teisinga lentele, – jam skiriami visi taškai.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
14		**4**	
14.1		**2**	
	$\log_a\left(\frac{1}{a}\right) + 6\log_a(\sqrt{a}) = -1 + 6\log_a(a^{\frac{1}{2}}) =$	1	Už teisingai pritaikytą savybę bent vieno logaritminio reiškinio reikšmei apskaičiuoti.
	$= -1 + 3 = 2.$ *Ats.:* 2.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
14.2		**2**	
	$a^{-1} \cdot \sqrt[3]{a^6} = a^{-1} \cdot a^2 = a.$	1	Už teisingo sprendimo būdo pasirinkimą (pvz. už teisingai pritaikytas laipsnių savybes; teisingai pritaikytą skirtumo kubo arba kubų skirtumo formulę).
	$(a-2)^3 - a^3 + 6a^2 =$ $= a^3 - 6a^2 + 12a - 8 - a^3 + 6a^2 =$ $= 12a - 8.$ *Ats.:* $12a - 8$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
15		**10**	
15.1		**3**	
	$f'(x) = -2x + 3,$	1	Už teisingai apskaičiuotą išvestinę.
	$f'(x_0) = \text{tg}\,\alpha,$ $-2x_0 + 3 = -1,$ $x_0 = 2.$	1	Už teisingai apskaičiuotą lietimosi taško abscisę x_0.
	$f(x_0) = f(2) = -2^2 + 6 = 2,$ $y = f'(2)(x-2) + f(2),$ $y = -(x-2) + 2 = -x + 4.$	1	Už gautą teisingą liestinės lygtį.
15.2		**3**	
	I būdas $-x^2 + 3x = 0,$ $-x(x-3) = 0,$ $x_1 = 0, x_2 = 3.$	1	Už teisingai apskaičiuotus integravimo rėžius. **Pastaba.** Mokinys gali viršutiniu rėžiu imti parabolės viršūnės abscisę.
	$S_{AOB} = \int_0^3 (-x^2 + 3x)\mathrm{d}x =$	1	Už teisingai išreikštą figūros *AOB* plotą apibrėžtiniu integralu. **Pastaba.** Mokinys gali figūros *AOB* plotą skaičiuoti ir taip: $S_{AOB} = 2\int_0^{1,5}(-x^2 + 3x)\,\mathrm{d}x.$
	$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2\right)\Big\|_0^3 = \frac{9}{2}.$	1	Už teisingą pirmykštę funkciją ir gautą teisingą atsakymą.
	II būdas  		
	Pavaizduota kreivinė trapecija, kurios plotas *S*. Žinoma, kad $S = \frac{2}{3} \cdot S_{OBCD}$. Tada $S = S_{AOB} = \frac{2}{3} \cdot S_{OBCD} = \frac{2}{3} \cdot OB \cdot OD$.	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą.
	$-x^2 + 3x = 0,$ $-x(x-3) = 0,$ $x_1 = 0, x_2 = 3 \Rightarrow B(3;0) \Rightarrow OB = 3.$	1	Už teisingai apskaičiuotą kraštinės *OB* (arba *OD*) ilgį.
	$OD = f(x_v),$ $x_v = 1{,}5;\ f(x_v) = f(1{,}5) = \frac{9}{4} \Rightarrow OD = \frac{9}{4},$ $S_{AOB} = \frac{2}{3} \cdot S_{OBCD} = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{2}.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.

15.3		**4**	
	$S_{\text{figūros}} = \int_0^2 (0{,}5x^3 + a + x^2 - 3x)\mathrm{d}x =$	1	Už teisingai išreikštą figūros plotą apibrėžtiniu integralu.
	$= \left(\frac{x^4}{8} + ax + \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right)\Big\|_0^2 =$	1	Už teisingą pirmykštę funkciją.
	$= 2 + 2a + \frac{8}{3} - 6 = 2a - \frac{4}{3},$	1	Už teisingai gautą figūros ploto išraišką per a.
	$2a - \frac{4}{3} = \frac{28}{27} \cdot \frac{9}{2},$ $2a - \frac{4}{3} = \frac{14}{3},$ $2a = 6,$ $a = 3.$ *Ats.:* $a = 3.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
16		**6**	
16.1		**2**	
	Pagal Pitagoro teoremą stačiajam trikampiui CAA_1: $CA^2 + AA_1{}^2 = CA_1{}^2$, $CA^2 + x^2 = 9^2$. Todėl $CA = \sqrt{81 - x^2}$ (arba $CA^2 = 81 - x^2$).	1	Už gautą teisingą prizmės pagrindo kraštinės ilgio (arba kraštinės ilgio kvadrato) išraišką per x.
	$V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot AA_1$. Lygiakraščio trikampio ABC plotas yra $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot CA^2$. $V(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (81 - x^2) \cdot x = \frac{\sqrt{3}}{4}(81x - x^3)$.	1	Už teisingą pagrindimą.
16.2.		**4**	
	I būdas $V'(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(81 - 3x^2)$.	1	Už teisingai gautą funkcijos $V(x)$ išvestinę.
	$\frac{\sqrt{3}}{4}(81 - 3x^2) = 0$, $x^2 = 27$, $x_1 = -3\sqrt{3}$; $x_2 = 3\sqrt{3}$.	1	Už gautus teisingus kritinius taškus.
	$x_1 \notin (0; 9)$, $V'(1) = 19{,}5\sqrt{3} > 0$, $V'(8) = -27{,}75\sqrt{3} < 0$.	1	Už teisingai nustatytus funkcijos išvestinės ženklus apibrėžimo srities intervaluose.
	 $x = 3\sqrt{3}$ yra maksimumo taškas, kuriame funkcija $V(x)$ įgyja didžiausią reikšmę. *Ats.*: $x = 3\sqrt{3}$.	1	Už teisingą pagrindimą, kad funkcija $V(x)$ įgyja didžiausią reikšmę, kai $x = 3\sqrt{3}$, ir gautą teisingą atsakymą.
	II būdas $V'(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(81 - 3x^2)$.	1	Už teisingai gautą funkcijos $V(x)$ išvestinę.
	$\frac{\sqrt{3}}{4}(81 - 3x^2) = 0$, $x^2 = 27$, $x_1 = -3\sqrt{3}$; $x_2 = 3\sqrt{3}$.	1	Už gautus teisingus kritinius taškus.
	$V'(-8) = -27{,}75\sqrt{3} < 0$, $V'(1) = 19{,}5\sqrt{3} > 0$, $V'(8) = -27{,}75\sqrt{3} < 0$.	1	Už teisingai nustatytus funkcijos išvestinės ženklus intervaluose.
	 Kadangi $x \in (0; 9)$, tai $x = 3\sqrt{3}$ yra maksimumo taškas, kuriame funkcija $V(x)$ įgyja didžiausią reikšmę. *Ats.*: $x = 3\sqrt{3}$.	1	Už teisingą pagrindimą, kad funkcija $V(x)$ įgyja didžiausią reikšmę, kai $x = 3\sqrt{3}$, ir gautą teisingą atsakymą.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
17		**6**	
	I būdas $f'(x) = \dfrac{1}{1-2x} \cdot (1-2x)' = \dfrac{-2}{1-2x}$,	1	Už teisingai pritaikytą funkcijos $h(x) = \ln x$ išvestinės skaičiavimo formulę.
		1	Už teisingai pritaikytą sudėtinės funkcijos išvestinės skaičiavimo formulę.
	$g'(x) = \dfrac{-12 \cdot (1-2x) + 2 \cdot (1-12x)}{(1-2x)^2} =$ $= \dfrac{-10}{(1-2x)^2}$,	1	Už teisingai gautą funkcijos $g(x)$ išvestinę.
	$\dfrac{-2}{1-2x} \geq \dfrac{-10}{(1-2x)^2}$, $\dfrac{-2(1-2x)+10}{(1-2x)^2} \geq 0$, $\dfrac{4x+8}{(1-2x)^2} \geq 0$,	1	Už teisinai pertvarkytą nelygybę į pavidalą $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$.
	$4x + 8 = 0$, $1 - 2x \neq 0$, $x = -2$, $x \neq 0{,}5$,  $x \in [-2; 0{,}5) \cup (0{,}5;\ +\infty)$,	1	Už teisingai gautą sudarytos nelygybės sprendinių aibę.
	$D(f) = (-\infty; 0{,}5)$, $D(g) = (-\infty; 0{,}5) \cup (0{,}5;\ +\infty)$. Todėl $f'(x) \geq g'(x)$, kai $x \in [-2; 0{,}5)$. *Ats.:* $[-2; 0{,}5)$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
	II būdas $f'(x) = \dfrac{1}{1-2x} \cdot (1-2x)' = \dfrac{-2}{1-2x}$,	1	Už teisingai pritaikytą funkcijos $h(x) = \ln x$ išvestinės skaičiavimo formulę.
		1	Už teisingai pritaikytą sudėtinės funkcijos išvestinės skaičiavimo formulę.
	$g'(x) = \dfrac{-12 \cdot (1-2x) + 2 \cdot (1-12x)}{(1-2x)^2} =$ $= \dfrac{-10}{(1-2x)^2}$,	1	Už teisingai gautą funkcijos $g(x)$ išvestinę.
	$\dfrac{-2}{1-2x} \geq \dfrac{-10}{(1-2x)^2}$, $(1-2x)^2 > 0$, kai $x \in D(f) = (-\infty; 0{,}5)$, todėl $-2(1-2x) \geq -10$,	1	Už teisingai pertvarkytą trupmeninę nelygybę į tiesinę nelygybę.
	$-2 + 4x \geq -10$, $x \geq -2$, $x \in [-2; +\infty)$,	1	Už teisingai gautą tiesinės nelygybės sprendinių aibę.

	$D(f) = (-\infty; 0{,}5)$, $D(g) = (-\infty; 0{,}5) \cup (0{,}5;\ +\infty)$. Todėl $f'(x) \geq g'(x)$, kai $x \in [-2; 0{,}5)$. *Ats.:* $[-2; 0{,}5)$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
18		**4**	
	$S_3 = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2$ $b_1 \cdot q^5 = 16$ $b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_1 \cdot q} + \frac{1}{b_1 \cdot q^2}$	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą – teisingai sudarytą lygtį.
	$b_1 \cdot (1 + q + q^2) = \frac{q^2 + q + 1}{b_1 \cdot q^2}$ $\frac{16}{q^5} \cdot (1 + q + q^2) = \frac{q^2 + q + 1}{\frac{16}{q^5} \cdot q^2}$	1	Už teisingai sudarytą lygtį vieno nežinomojo atžvilgiu.
	$256 \cdot (1 + q + q^2) = q^8 \cdot (1 + q + q^2)$ $(1 + q + q^2) \cdot (256 - q^8) = 0$ $q^2 + q + 1 = 0$ arba $256 - q^8 = 0$	1	Už teisingai pasirinktą lygties sprendimo būdą.
	$q^2 + q + 1 = 0 \Rightarrow$ nėra sprendinių, nes D < 0 arba $256 - q^8 = 0 \Rightarrow q = \pm 2$ *Ats.:* $q = \pm 2$.	1	Už gautą teisingą geometrinės progresijos vardiklį.
Pastaba. Jeigu mokinys spręsdamas lygtį $256 \cdot (1 + q + q^2) = q^8 \cdot (1 + q + q^2)$ padalija jos abi puses iš $1 + q + q^2$, bet neparašo, kad lygtis $q^2 + q + 1 = 0$ neturi sprendinių, nes D < 0, trečiasis taškas jam nėra skiriamas.			